Ребята, на этом уроке мы займемся обобщением знаний о показателях степеней. Мы умеем вычислять степени с любым целочисленным показателем, но как, же быть в случае не целого числа? И какая связь между корнями и степенными функциями не целого показателя?

 Давайте немного повторим, рассмотрим число вида $a^{n}$.

1. Если n=0, то $a^{n}=a^{0}=1$.

2. Если n=1, то $a^{n}=a^{1}=a$.

3. Если n=2,3,4,5… то $a^{n}=a∙a∙a…∙a (n множителей)$

4. Если n=1,2,3,4,5… и а≠0 то $a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$

Указанные выше правила можно так же использовать как памятку!

Во всех представленных выше правилах, показатель степени целое число, но как, же быть в случае дробного показателя?

Что же представляет из себя число $2^{\frac{2}{3}}$ и как с ним работать?

При работе с такими степенями нужно, чтобы все свойства для целочисленных степеней сохранялись. Например, при возведении степени в степень – показатели перемножались.

Например:

$$(2^{\frac{2}{3}})^{3}=2^{\frac{2}{3}∙3}=2^{2}$$

Давайте введем вот такую замену символов:

$$a=2^{\frac{2}{3}}$$

Тогда:

$$a^{3}=2^{2}$$

откуда получаем: $a=\sqrt[3]{2^{2}}$

То есть мы можем представить исходное выражение в таком виде:

$$2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^{2}}$$

**Определение.** Пусть нам дана обыкновенная дробь $\frac{a}{b} (b\ne 1)$ и х≥0, тогда

$$x^{\frac{a}{b}}=\sqrt[b]{x^{a}}$$

Например: $3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}$, $5^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{5^{2}}$

Благодаря такому определению удалось сохранить все свойства степенных функции.

Давайте умножим два числа с одинаковыми основаниями но разными степенями:

$$a^{\frac{2}{3}}∙a^{\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{a^{2}}∙\sqrt[4]{a}=\sqrt[12]{a^{8}}∙\sqrt[12]{a^{3}}=\sqrt[12]{a^{11}}=a^{\frac{11}{12}}$$

Но заметим так же:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$$

То есть:

$$a^{\frac{2}{3}}∙a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{11}{12}}$$

Складывать дроби гораздо проще, чем работать с радикалами (нужно привести показатели к одинаковому виду и потом только перемножать), поэтому принято переходить к степенным функциям с дробным показателем.

Пример. Вычислить:

а) $27^{\frac{1}{3}}$ б)$ 32^{\frac{3}{5}}$ в)$0^{\frac{5}{7}}$ г) $(-32)^{\frac{1}{5}}$

Решение.

а) $27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=3$

б)$ 32^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{32^{3}}=(\sqrt[5]{32})^{3}=2^{3}=8$

в) $0^{\frac{5}{7}}=\sqrt[7]{0^{5}}=(\sqrt[7]{0})^{5}=0^{5}=0$

г) Извлекать корень с дробным показателем мы можем только из положительного числа, ребята посмотрите на наше определение. Наше выражение не имеет смысла.

Вообще вроде бы $(-32)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{-32}=-2$ - верная запись, но давайте внимательно посмотрим на наше выражение:

$$(-32)^{\frac{1}{5}}=(-32)^{\frac{2}{10}}=\sqrt[10]{(-32)^{2}}=\sqrt[10]{1024}=2$$

Получили противоречивое выражение, хотя все операции выполнены верно, согласно свойствам и определениям, поэтому математики запретили возводить в дробную степень отрицательные числа. Ребята запомните это! В дробную степень мы можем возводить только положительные числа!

**Определение.** Пусть нам дана обыкновенная дробь $\frac{a}{b} (b\ne 1)$ и х>0, тогда

$$x^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$$

Например: $2^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

$$3^{-\frac{3}{5}}=\frac{1}{3^{\frac{3}{5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{3^{3}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{27}}$$

Все свойства с которыми мы сталкивались при работе со степенными числами сохраняются и в случае рациональных степеней, давайте повторим свойства:

Пусть нам даны положительные числа a>0 и b>0, x и y – произвольные рациональные числа, тогда выполняются следующие 5 свойств:

1. $a^{x}∙a^{y}=a^{x+y}$

2. $a^{x}:a^{y}=a^{x-y}$

3. $(a^{x})^{y}=a^{x∙y}$

4. $(a∙b)^{x}=a^{x}∙a^{y}$

5. $(\frac{a}{b})^{x}=\frac{a^{x}}{b^{x}}$

Пример.

Упростите выражение:

$$\frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}+\frac{\sqrt{y}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$$

Решение.

 Перепишем числители в виде степенных функций:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}+\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$$

Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)+y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})}=\frac{x-x^{\frac{1}{2}}∙y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}∙x^{\frac{1}{2}}+y}{x-y}=\frac{x+y}{x-y}$$

Пример.

Решить уравнение:

а) $\sqrt[5]{x^{4}}=1$ б) $x^{\frac{4}{5}}=1$

Решение.

а) Возведем обе части уравнения в пятую степень

$$x^{4}=1$$

$$x=\pm 1$$

б) Наше уравнение очень похоже на предыдущие, если мы перейдем от записи корней к степенным функциям, то запись получится идентичная, но стоит учесть, что у нас сразу дано степенное выражение, по определению число х может быть только положительным, тогда у нас остается один ответ х=1.

Пример.

Решить уравнение:

$$x^{-\frac{2}{5}}+x^{-\frac{1}{5}}-12=0$$

Решение.
Давайте введем новую переменную:

$$y=x^{-\frac{1}{5}}$$

$$y^{2}=(x^{-\frac{1}{5}})^{2}=x^{-\frac{2}{5}}$$

Тогда наше уравнение примет вид обычного квадратного уравнения:

$$y^{2}+y-12=0$$

Решив уравнение, получим два корня:

$$y\_{1}=-4 и y\_{2}=3$$

Нам остается решить два уравнения:

$$x^{-\frac{1}{5}}=-4 и x^{-\frac{1}{5}}=3$$

Первое уравнение не имеет корней, так как вспомним, что опять же, степенные функции с рациональным показателем определены только для положительных чисел.

Решим второе уравнение

$$x^{-\frac{1}{5}}=3$$

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}=3$$

$$x^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{3}$$

$$\sqrt[5]{x}=\frac{1}{3}$$

$$x=(\frac{1}{3})^{5}=\frac{1}{243}$$

Ребята, мы рассмотрели с вами два примера на решение уравнений, такие уравнения принято называть иррациональными.

Давайте перечислим основные методы решений иррациональных уравнений:

1) Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень. (при использовании этого метода нужно проверять полученные решения, так как могут возникнуть посторонние решения)

2) Метод замены переменных (введения новых переменных).

3) Построение графиков функций. Обе части уравнения представляем в виде функций и строим их графики, находим точки пересечения графиков.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить:

а) $64^{\frac{1}{3}}$ б)$ 64^{\frac{5}{6}}$ в)$81^{\frac{2}{3}}$ г) $(-317)^{\frac{3}{7}}$

2. Упростите выражение:

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}-\frac{\sqrt[3]{y}}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}$$

3. Решить уравнение:

а) $\sqrt[3]{x^{2}}=8$ б) $x^{\frac{2}{3}}=8$

4. Решить уравнение:

$$x^{-\frac{2}{3}}-7x^{-\frac{1}{3}}+10=0$$