Урок на тему:

Исследование функции на монотонность.

Что будем изучать:

Убывающие и возрастающие функции.

Связь производной и монотонности функции.

Две важные теоремы о монотонности.

Примеры.

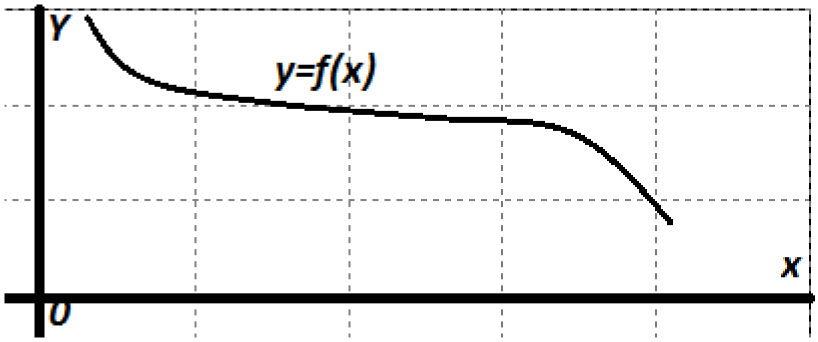
Ребята, мы с вами рассмотрели в более ранних классах множество различных функций и строили их графики. Теперь давайте введем новое правило, которое работает для всех функций, которые мы с вами рассматривали, и будем рассматривать.

1) Убывающие и возрастающие функции.

Давайте рассмотрим понятие возрастающей и убывающей функции. Ребята, а что такое функция вообще?

Функцией называется соответствие y=f(x) в котором каждому значению x ставится единственное значение y.

Построим график некоторой функции:



На нашем графике, чем больше x, тем меньше y. И так давайте дадим определение убывающей функции:

Функция называется убывающей, если большому значению аргумента соответствуем меньшее значения функции.

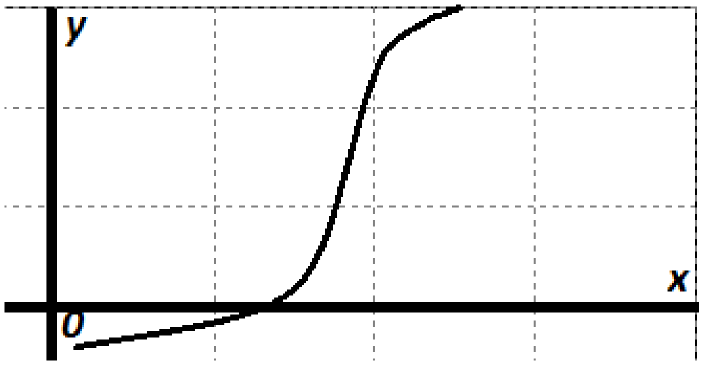
Если x2>x1, то f(x2)<f(x1), иначе говоря, чем больше x тем больше y.

Теперь давайте рассмотрим график такой функции:

На нашем графике, чем больше x, тем меньше y. И так давайте дадим определение убывающей функции:

Функция называется убывающей, если большему значению аргумента соответствуем меньшее значения функции.

Если x2>x1, то f(x2)<f(x1), иначе говоря, чем больше x тем меньше y.



На этом графике уже, чем больше x, тем больше y. И так давайте дадим определение возрастающей функции:

Функция называется возрастающей, если большему значению аргумента соответствуем большее значения функции.

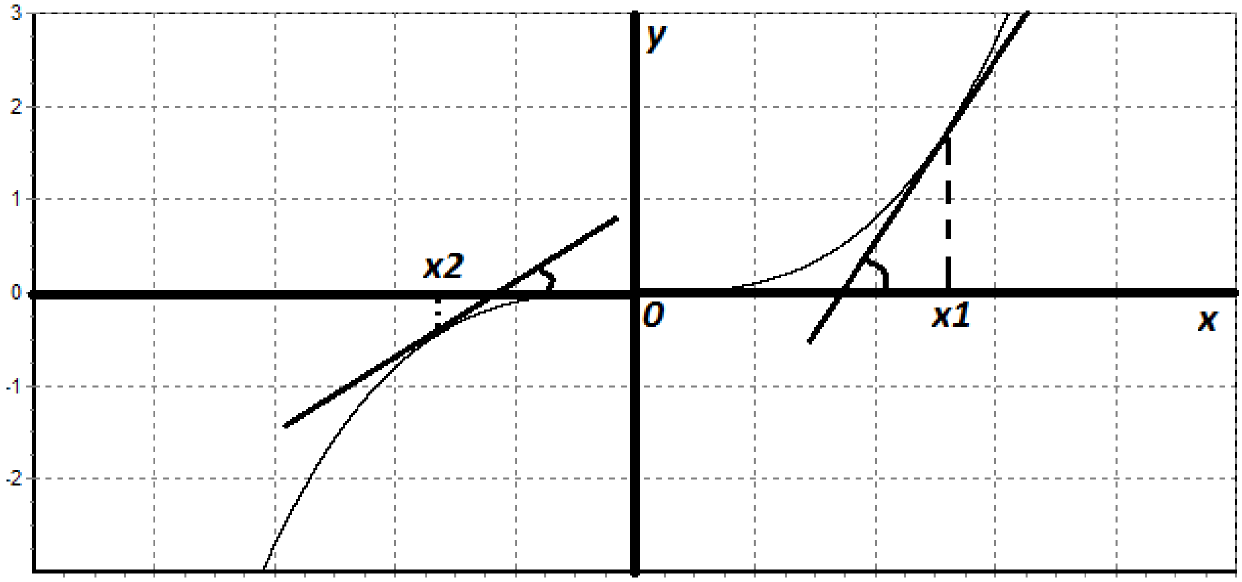
Если x2>x1, то f(x2>(x1), иначе говоря, чем больше x тем больше y.

Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, то говорят, что она монотонна на данном промежутке.

2) Связь производной и монотонности функции.

Ребята, а теперь давайте посмотрим то, как можно применять производную при исследовании графиков функции.

Нарисуем график возрастающей дифференцируемой функции и проведем пару касательных к нашему графику.

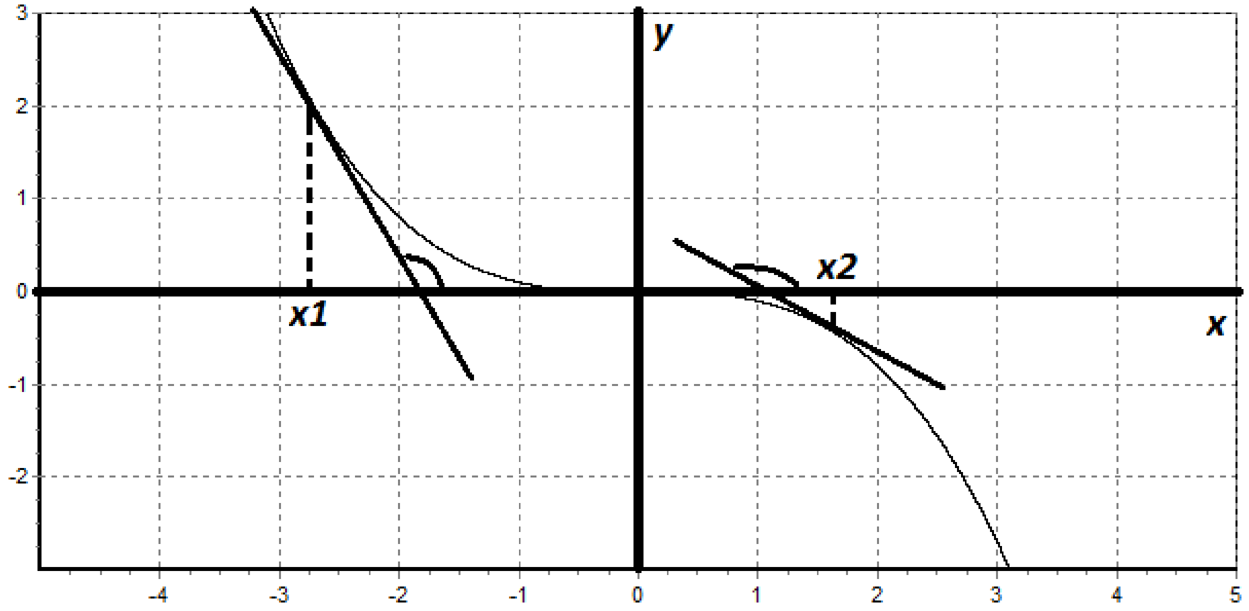


Если посмотреть на наши касательные и зрительно провести любую другую касательную, то можно заметить что угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс острый, а значит и положительный угловой коэффициент касательной. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Таким образом, значение производной положительно во всех точках нашего графика.

Для возрастающей функции выполняет следующее неравенство, для любой точки x:

$$f'(x) \geq 0$$

Ребята, теперь давайте посмотрим на график некоторой убывающей функции и построим касательные к графику функции:



Посмотрим на касательные и зрительно проведем любую другую касательную, то заметим что угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс тупой, а значит отрицательный угловой коэффициент касательной. Таким образом, значение производной отрицательно во всех точках нашего графика.

Для убывающей функции выполняет следующее неравенство, для любой точки x:

$$f'(x) \leq 0$$

И так монотонность функции зависит от знака производной:

Если функция возрастает на промежутке и имеет производную на этом промежутке, то эта производная будет неотрицательна.

Если функция убывает на промежутке и имеет производную на этом промежутке, то эта производная будет неположительна.

Важно, чтобы промежутки, на которых мы рассматриваем, требуемую нам функцию было открытым!

3) Две важные теоремы о монотонности

Теорема 1. Если во всех точках открытого промежутка Х выполняется неравенство f'(x)≥0 (Причем равенство производной нулю либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция y=f(x) возрастает на промежутке Х.

Теорема 2. Если во всех точках открытого промежутка Х выполняется неравенство f'(x)≤0 (Причем равенство производной нулю либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция y=f(x) убывает на промежутке Х.

Теорема 3. Если во всех точках открытого промежутка Х выполняется равенство f'(x)=0, то функция y=f(x) постоянна на этом промежутке.

4) Примеры.

Пример 1: Доказать что функция $y = x^7 + 3x^5 + 2x - 1$ *возрастает на всей числовой прямой.*

Решение:

Найдем производную нашей функции:

$$y' = 7x^6 + 15x^4 + 2$$

Т.к. степень при х четная, то степенная функция принимает только положительные значения, тогда $y' > 0$ *для любого х, а значит, по теореме 1 наша функция возрастает на всей числовой прямой*

Пример 2:

Доказать что функция убывает: $y = \sin(2x) - 3x$

Решение:

Найдем производную нашей функции:

$$y' = 2\cos(2x) - 3$$

Решим неравенство:

$$2\cos(2x) - 3 \le 0$$
$$2\cos(2x) \le 3$$
$$\cos(2x) \le 3/2$$

Т.к. -1≤cos(x)≤1, значит наше неравенство выполняется для любых х, тогда по теореме 2 функция $y = \sin(2x) - 3x$ *убывает.*

Пример 3:

Исследовать на монотонность функцию:

$$y = x^2 + 3x - 1$$

Решение:

Найдем производную нашей функции:

$$y' = 2x + 3$$

Решим неравенство:

$$2x + 3 \geq 0$$

$$x \geq -3/2$$

Тогда наша функция возрастает при x≥-3/2,

а убывает при x≤-3/2

Ответ: при x≥-3/2 функция возрастает, при x≤-3/2 функция убывает.

Пример 4:

Исследовать на монотонность функцию:

$$y = \sqrt{3x - 1}$$

Решение:

Найдем производную нашей функции:

$$y' = \frac{3}{2\sqrt{3x - 1}}$$

Решим неравенство:

$$\frac{3}{2\sqrt{3x - 1}} \geq 0$$

Наше неравенство больше либо равно нуля, когда $\sqrt{3x - 1}$ *больше либо равен нулю*

$$\sqrt{3x - 1} \geq 0$$

$$3x - 1 \geq 0$$

$$x \geq 1/3$$

Решим неравенство:

$$\frac{3}{2\sqrt{3x - 1}} \leq 0$$

$$\sqrt{3x - 1} \leq 0$$

$$3x - 1 \leq 0$$

Но это невозможно, т.к.квадратный корень определен только для положительных выражений, значит промежутков убывания у нашей функции нет.

Ответ: при $x \geq 1/3$ функция возрастает.

Задачи для самостоятельного решения:

1) *Доказать что функция* $y = x^9 + 4x^3 + 1x - 10$ *возрастает на всей числовой прямой.*
2) *Доказать что функция убывает:* $y = \cos(5x) - 7x$
3) *Исследовать на монотонность функцию:*
$$y = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$$
4) *Исследовать на монотонность функцию:*
$$y = \frac{3x - 1}{3x + 1}$$