Урок на тему:

Нахождение наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке.

Что будем изучать:

Нахождение наибольшего и наименьшего значения по графику функции.

Нахождение наибольшего и наименьшего значения с помощью производной.

Алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции y=f(x) на отрезке [a;b].

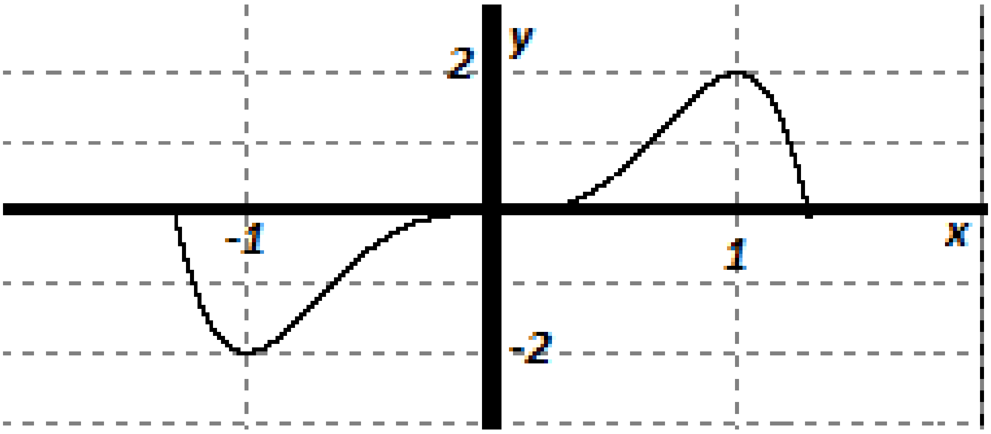
Наибольшее и наименьшее значение функции на незамкнутом интервале.

Примеры.

1) Нахождение наибольшего и наименьшего значения по графику функции.

Ребята, мы с вами находили наибольшее и наименьшее значения функции и раньше. Мы смотрели на график функции и могли сделать вывод, где функция достигает наибольшего значения, а где наименьшего.

Давайте повторим:



По графику нашей функции видно, что наибольшее значение достигается в точке x=1, оно равно двум, а наименьшее значение достигается в точке x=-1 и оно равно минус двум. Данным способом довольно таки просто находить наибольшие и наименьшие значения, но не всегда существует возможность построить график функции.

2) Нахождение наибольшего и наименьшего значения с помощью производной.

Ребята, а как вы думаете, как с помощью производной находить наибольшее и наименьшее значение?

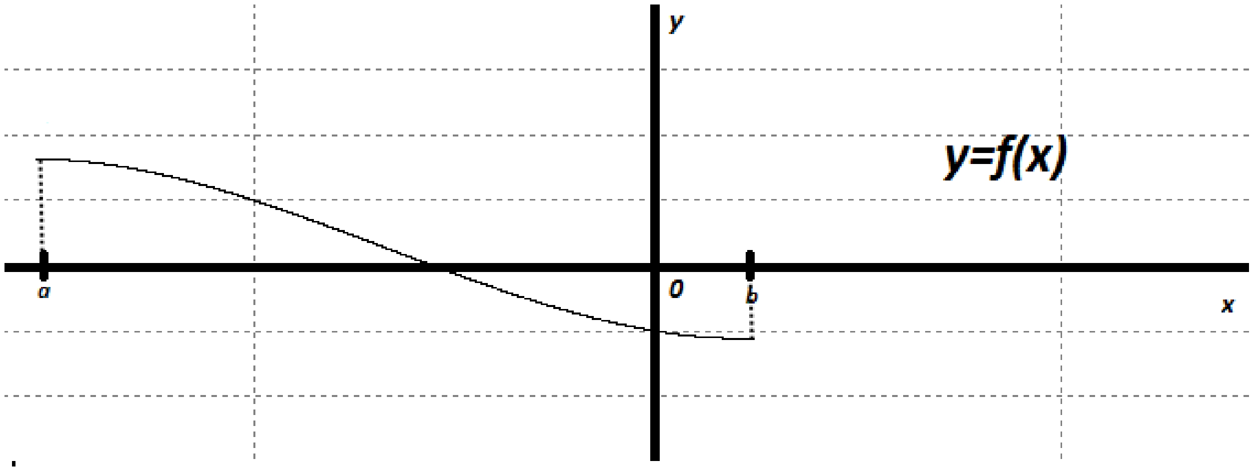
Ответ кроется если вспомнить тему экстремумы функции. Там мы с вами находили точки максимума и минимума, правда ли термины похожи? Но путать наибольшее и наименьшее значение с максимум и минимум функции нельзя, это разные понятия.

И так давайте введем правила:

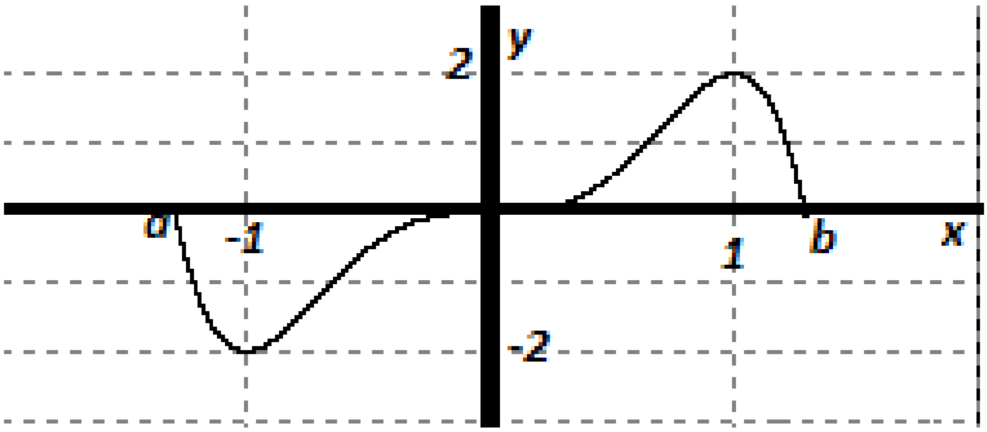
а) Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значения на этом отрезке.

б) Наибольшего и наименьшего значения функция может достигать как на концах отрезках, так и внутри него.

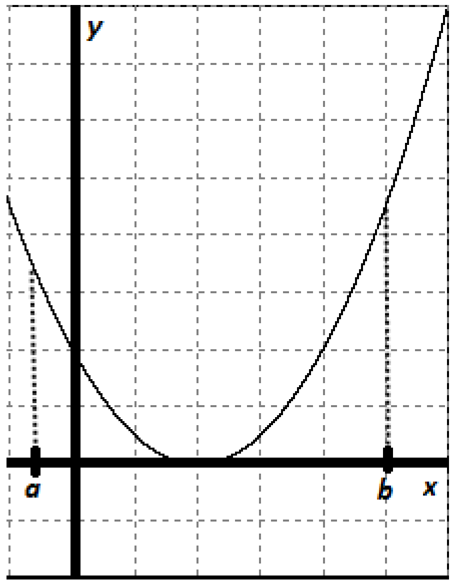
Давайте посмотрим на пункт б) поподробней.



а)



б)



в)

На рисунке а) функция достигает своего наибольшего и наименьшего значения на концах отрезках [a;b]; На рисунке б) внутри отрезка [a;b]; На рисунке в) точка минимума внутри отрезка, а точка максимума на конце отрезка, в точке b.

в) Если наибольшее и наименьшее значение достигается внутри отрезка, то только в стационарных или критических точках.

3) Алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции y=f(x) на отрезке[a;b]:

а) Найти производную $f'(x)$

б) Найти стационарные и критические точки внутри отрезка [a;b]
в) Вычислить значение функции в стационарных и критических точках, а так же f(a) и f(b). Выбрать наименьшее и наибольшее значения, это и будут точки наименьшего и наибольшего значения функции.

4) Наибольшее и наименьшее значение функции на незамкнутом интервале.

Ребята, а как же искать наибольшее и наименьшее значение функции на незамкнутом интервале?

Для этого воспользуемся важной теоремой, которая доказывается в курсе высшей математики:

Теорема. Пусть функция y=f(x) непрерывна на промежутке X, и имеет внутри этого промежутка единственную стационарную или критическую точку x=x0, тогда:

а) если x=x0 – точка максимума, то $y_{\text{наиб.}} = f(x0)$
б) если x=x0 – точка минимума, то $y_{\text{наим.}} = f(x0)$

Пример:
Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x - 5$$

на отрезке

а) [-9;-1] б) [-3;3] в) [3;9]

Решение:

Найдем производную:

$$y' = x^2 + 4x + 4$$

Производная существует на всей области определения тогда нам надо найти стационарные точки.

$$y' = 0 \text{ при } x = -2$$

Дальнейшие расчеты проведем для требуемых отрезков:

а) Найдем значения функции на концах отрезка и в стационарной точки.

x	-9	-2	-1
y	-122	$-7\frac{2}{3}$	$-7\frac{1}{3}$

Тогда $y_{\text{наим.}} = -122$*, при* $x = -9$*,* $y_{\text{наиб.}} = -7\frac{1}{3}$*, при* $x = -1$

б) Найдем значения функции на концах отрезка и в стационарной точки.

x	-3	-2	3
y	-8	$-7\frac{2}{3}$	34

Наибольшее и наименьшее значение достигается на концах отрезка:

Тогда $y_{\text{наим.}} = -8$*, при* $x = -3$*,* $y_{\text{наиб.}} = 34$*, при* $x = 3$

в) Стационарная точка не попадает на наш отрезок, найдем значения на концах отрезка:

x	3	9
y	34	436

Тогда $y_{\text{наим.}} = 34$, *при* $x = 3$, $y_{\text{наиб.}} = 436$, *при* $x = 9$

Пример:

Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = x^2 - 3x + 5 + |1 - x|$$

на отрезке: [0;4]

Решение:

Раскроем модуль и преобразуем нашу функцию:

$$y = x^2 - 3x + 5 + 1 - x, \text{при } x \leq 1$$
$$y = x^2 - 3x + 5 - 1 + x, \text{при } x \geq 1$$

Тогда наша функция примет вид:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, \text{при } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 4 \text{ при } x \geq 1 \end{cases}$$

Найдем критические точки:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4, \text{при } x \leq 1 \\ 2x - 2 \text{ при } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \text{при } x = \begin{cases} 2, \text{при } x \leq 1 \\ 1, \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

И так у нас две стационарные точки не будем забывать, что наша функция состоит как бы из двух функций при разных х.

Найдем наибольшее и наименьшее значение функции, вычислим значения функции в стационарных точках и на концах отрезка:

x	0	1	2	4
y	6	3	4	12

Ответ:

Функция достигает наименьшего значения в стационарной точке x=1 $y_{\text{наим.}} = 3$

Функция достигает наибольшего значения на конце отрезка, точке x=4 $y_{\text{наиб.}} = 12$

Пример:

Найти наибольшее значение функции

$$y = \frac{3x}{x^2+3}$$

на луче: [0;+∞)

Решение:

Найдем производную нашей функции:

$$y' = \frac{(3x)'(x^2+3) - (x^2+3)'(3x)}{(x^2+3)^2} = \frac{3(x^2+3) - (2x)(3x)}{(x^2+3)^2} = \frac{3x^2+9-6x^2}{(x^2+3)^2}$$
$$= \frac{-3x^2+9}{(x^2+3)^2}$$

Производная определена всюду.

Найдем стационарные точки:

$$y' = \frac{-3x^2+9}{(x^2+3)^2} = 0$$

$$\frac{-3x^2+9}{(x^2+3)^2} = 0$$

$$-3x^2+9 = 0$$

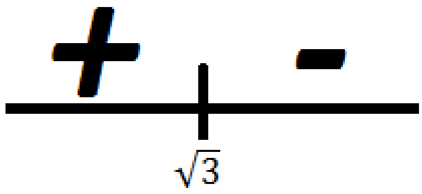
$$-3x^2 = -9$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Требуемому отрезку [0;+∞) принадлежит только точка $x = \sqrt{3}$

Определим характер монотонности около этой точки:



Тогда $x = \sqrt{3}$ *– точка максимума. Используя теорему о наибольшем и наименьшем значение функции на незамкнутом интервале, получаем в точке* $x = \sqrt{3}$ – *достигается наибольшее значение*.

Найдем наименьшее значение:

$$y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2 + 3} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $y_{\text{наиб.}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Задачи для самостоятельного решения:

1) *Найти наибольшее и наименьшее значение функции*

$$y = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 9x + 1$$

на отрезке

а) [-3;1] б) [2;5] в) [-4;7]

2) *Найти наибольшее и наименьшее значение функции*

$$y = x^2 - 6x + 8 + |x - 2|$$

на отрезке: [-1;5]

3) *Найти наибольшее и наименьшее значение функции*

$$y = -2x - \frac{1}{2x}$$

на луче: (0;+∞)