Урок на тему:

Построение графиков.

Ребята, мы с вами строили уже не мало графиков функций, например параболы, гиперболы, тригонометрических функций и другие. Давайте вспомним, как мы это делали? Мы выбирали точки на оси абсцисс, высчитывали значения ординат нашей функций и плавно соединяли наши ординаты на координатной плоскости. То есть, мы строили график по точкам. Но при построении многих графиков, точки нужно выбирать обдуманно. Теперь давайте обобщим наши знания и напишем правила построения графиков функций, в общем.

Что же такое график функции?

График функции – это множество точек, у которых абсциссы являются значениями из области определения, а ординаты - значениями функции y=f(x). График любой функций строят по точкам. Но если мы точно не знаем, какой будет вид у графика, то точки надо выбирать обдуманно. Ребята, какие важные точки есть у функций?

Давайте, вспомним их:

а) Стационарные и критические точки. Такие точки мы научились находить при вычислении экстремумов функций. Это точки, в которой производная либо равна нулю, либо не существует.

б) Точки экстремума. Точки максимума и минимума функций. Точки, возле которых определяется характер монотонности.

в) Точки пересечения графика с осью абсцисс и осью ординат. Значения, в которых функция y=f(x)=0 – точки пересечения с осью абсцисс. А если вычислить f(0) – то эта точка пересечения с осью ординат.

г) Точки разрыва функций. Эти точки ищутся для не непрерывных функций.

Ребята, давайте запишем основные правила построения графиков функций:

1) Если функция y=f(x) непрерывна на всей числовой прямой, то надо найти стационарные и критические точки, точки экстремума, промежутки монотонности, точки пересечения графика с осями координат и при необходимости выбрать еще несколько контрольных точек, в которых следует подсчитать значение нашей функции.

2) Если функция y=f(x) определена не на всей числовой прямой, то начинать следует с нахождения области определения функции, с указания точек ее разрыва.

3) Полезно исследовать функцию на чётность, поскольку графики четной или нечетной функций обладают симметрией (соответственно относительно оси y или относительно начала координат), и, следовательно, можно сначала построить только ветвь графика при x≥0, а затем дорисовать симметричную ветвь.

4) Если $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ *то прямая y=b является горизонтальной асимптотой нашего графика функции. Асимптота, это некоторой ориентир для нашей функции, то к чему стремится график функции в точке, но не достигает этого значения.*

5) Если $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$*, и при x=a знаменатель обращается в нуль, а числитель отличен от нуля, то x=a вертикальная асимптота.*

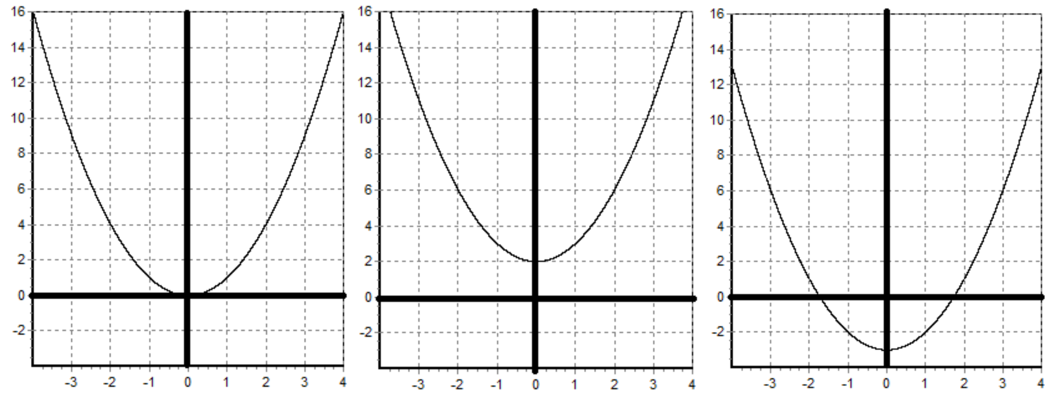
Несколько правил упрощающих построение графиков функций:

а) График функции y=f(x)+a получается из графика функции y=f(x) (график y=f(x) заранее известен), путем параллельного переноса графика y=f(x) на a единиц вверх, если a>0, и на a единиц вниз если a<0.

Для примера построим три графика: а) $y = x^2$ *б)* $y = x^2 + 2$ *в)* $y = x^2 - 3$

Графики наших функций получается из графика функции $y = x^2$*, путем его параллельного переноса: б) на две единицы вверх в) на три единицы вниз. Графики наших функций:*

а) б) в)

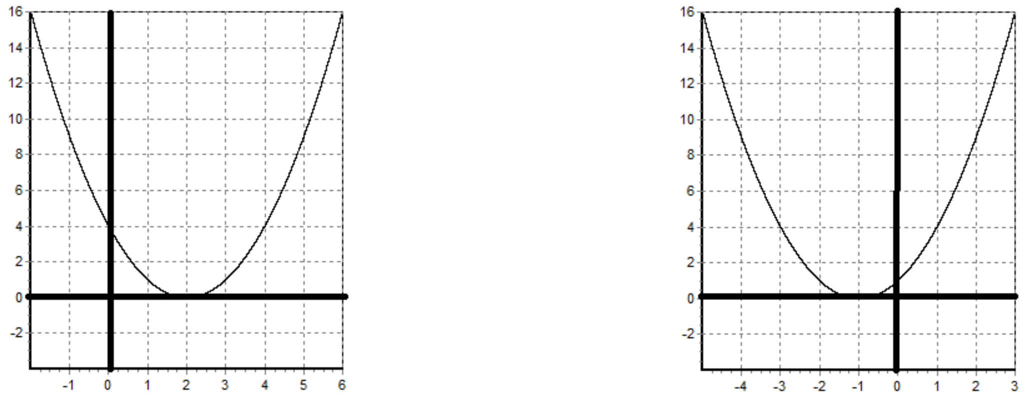


б) График функции y=f(x+a) получается из графика функции y=f(x) (график y=f(x) заранее известен), путем параллельного переноса графика y=f(x) на a единиц влево если a>0, и на a единиц вправо если a<0.

Для примера построим три графика: а) $y=(x-2)^2$ *б)* $y=(x+1)^2$

Графики наших функций получается из графика функции $y=x^2$*, путем его параллельного переноса: б) на две единицы вправо в) на одну единицу влево. Графики наших функций:*

а) б)

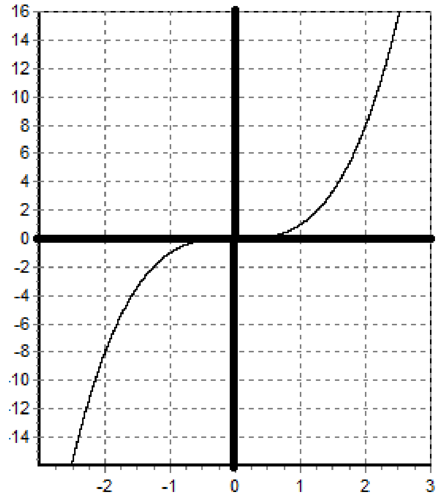


в) Для построения графика функции y=f(-x) следует построить график функции y=f(x) и отразить его относительно оси ординат. Полученный график является графиком функции y=f(-x).

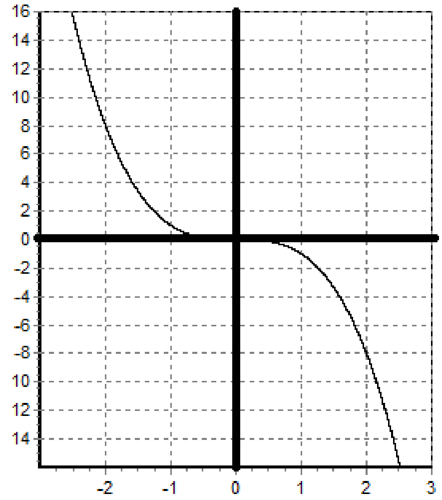
Для примера построим два графика: а) $y=x^3$ *б)* $y=(-x)^3$

Графики нашей функций получается из графика функции $y=x^3$*, путем отражения относительно оси ординат.*

а)



б)

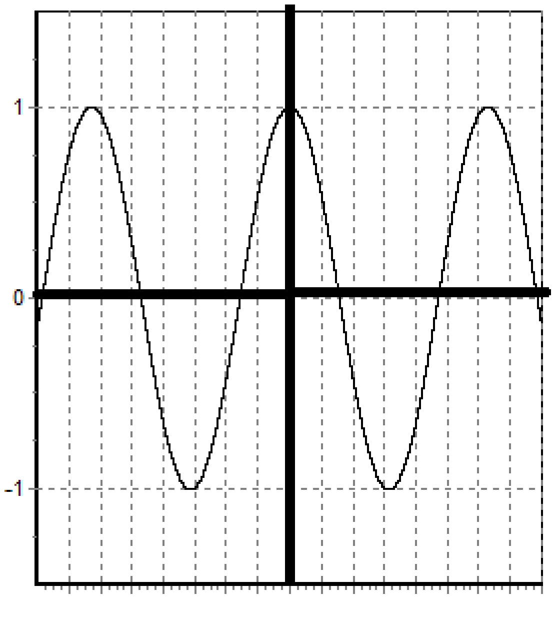


г) Для построения графика функции y= -f(x) следует построить график функции y=f(x) и отразить его относительно оси абсцисс.

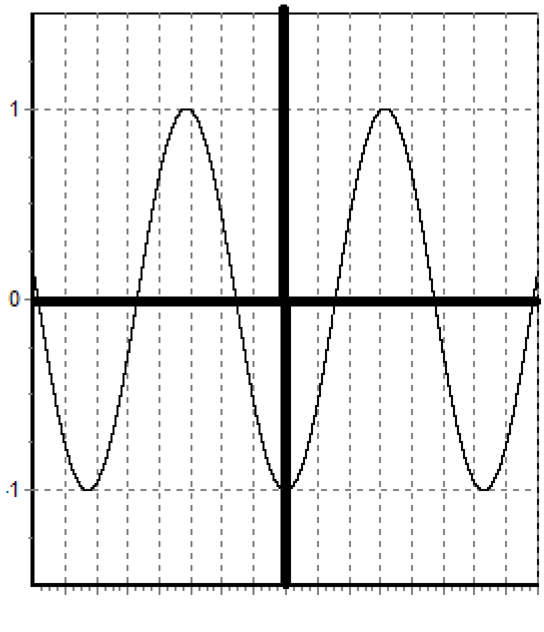
Для примера построим два графика: а) $y = cos(x)$ б) $y = -cos(x)$

Графики нашей функций получается из графика функции $y = cos(x)$, путем отражения относительно оси абсцисс.

а)



б)



Ребята, теперь давайте построим графики функций, вид которых заранее не известен, будем использовать правила, которые мы определили в начале.

Примеры.

а) Построить график функции

$$y = 2x^2 + 4x - 5$$

Решение:

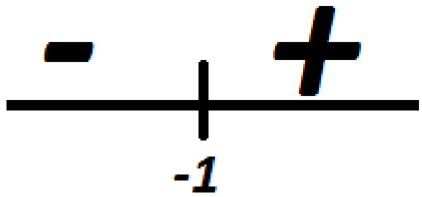
1) *Область определения: D(y)=(- **∞**;+**∞**)*
2) *Найдем стационарные точки:*

$$y' = 4x + 4$$

$$4x + 4 = 0$$

$$x = -1$$

3) *Определим вид стационарной точки и характер монотонности :*



Точка x=-1 – точка минимума.

4) *Найдем значение функции в точке x=-1*

$$y(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 5 = -7$$

*И так: наша функция убывает на промежутке =(- **∞**;-1),*

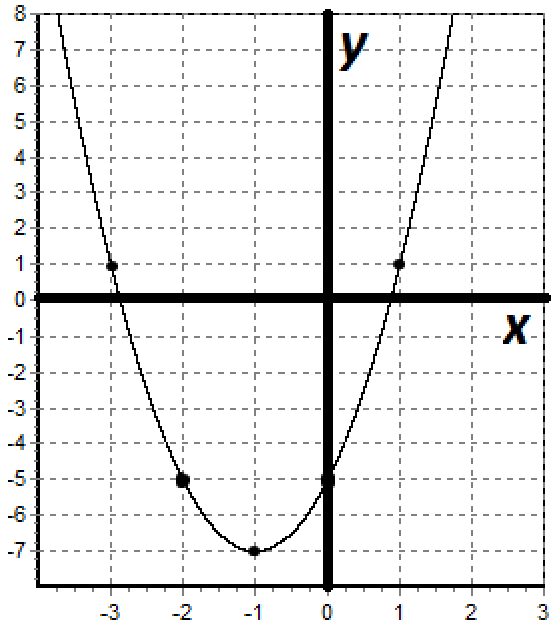
x=-1 – точка минимума,

*функция возрастает на (-1;+ **∞**).*

Вычислим значения функции в паре точек:

x	*-2*	*-3*	*0*	*1*
y	*-5*	*1*	*-5*	*1*

Построим график функции:



б) *Построить график функции*

$$y = 5x^3 - 3x^5$$

Решение:

1) *Область определения: D(y)=(- ∞;+∞)*

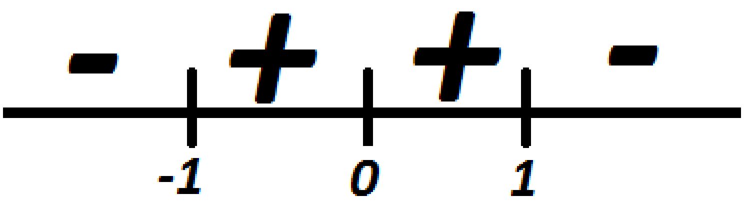
2) *Найдем стационарные точки:*

$$y' = 15x^2 - 15x^4$$

$$y' = 15x^2(1 - x^2) = 15x^2(1 - x)(1 + x)$$

$$15x^2(1 - x)(1 + x) = 0$$
$$x = 0; \pm 1$$

3) *Определим вид стационарной точки и характер монотонности :*



Точка x=-1 – точка минимума.

Точка x=0 – точка перегиба, функция в этой точки так же возрастает, но вогнутость меняется в другую сторону.

Точка x=1 – точка максимума.

4) *Найдем значение функции в точке x=-1*

$$y(-1) = 5(-1)^3 - 3(-1)^5 = -2$$

Найдем значение функции в точке x=0

$$y(0) = 5(0)^3 - 3(0)^5 = 0$$

Найдем значение функции в точке x=1

$$y(1) = 5(1)^3 - 3(1)^5 = 2$$

5) *исследуем функцию на четность:*

$$y(-x) = 5(-x^3) - 3(-x^5) = -5x^3 + 3x^5 = -y(x)$$

По определению функция нечетная, и график симметричен относительно начало координат.

И так:

Функция нечетная.

наша функция убывает на промежутке =(- ∞;-1),

x=-1 – точка минимума,

функция возрастает на (-1;1),

x=0 – точка перегиба,

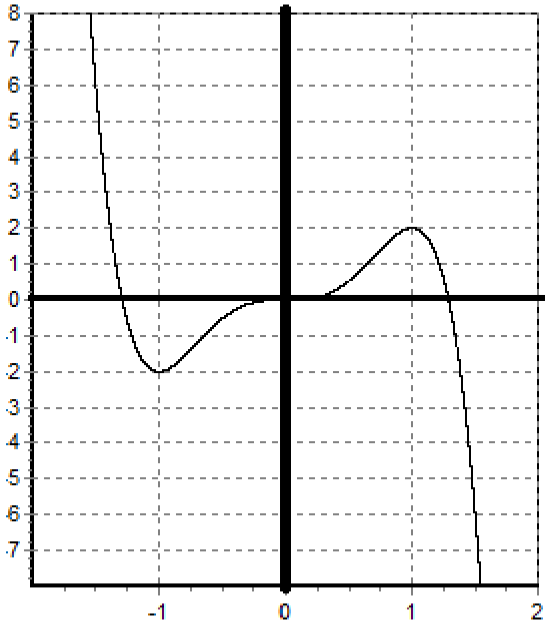
x=1 – точка максимума,

функция возрастает на (1;+ ∞).

Вычислим значения функции в паре точек:

x	*-2*	*2*
y	*56*	*-56*

Построим график функции:



в) Построить график функции

$$y = \frac{x^2+4}{x^2-4}$$

1) *Область определения: D(y)=(-∞;-2)U(-2;2) U(2; +∞)*

2) Исследуем функцию на четность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 + 4}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = y(x)$$

По определению функция четная, значит, график функции симметричен относительно оси ординат, можно сначала построить график функции для x≥0.

3) Прямая x=2 – вертикальная асимптота, т.к. знаменатель нашей функции в этой точке обращается в нуль.

Найдем горизонтальную асимптоту:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1$$

Прямая y=1 – горизонтальная асимптота.

4) Найдем стационарные и критические точки:

$$y' = \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}\right)' = \frac{(x^2 + 4)'(x^2 - 4) - (x^2 - 4)'(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2}$$

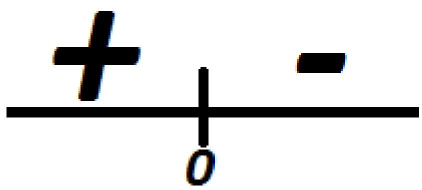
$$= \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$\frac{-16x}{(x^2 - 4)^2} = 0$$

$$x = 0$$

Критических точек у нашей функции нет, т.к. производная определена всюду на области определения нашей функции.

5) Определим вид стационарной точки и характер монотонности :



Точка x=0 – точка максимума.

И так:

Функция четная.

наша функция возрастает на промежутке =(- ∞;0),

x=0 – точка максимума,

функция убывает на (0;+ ∞).

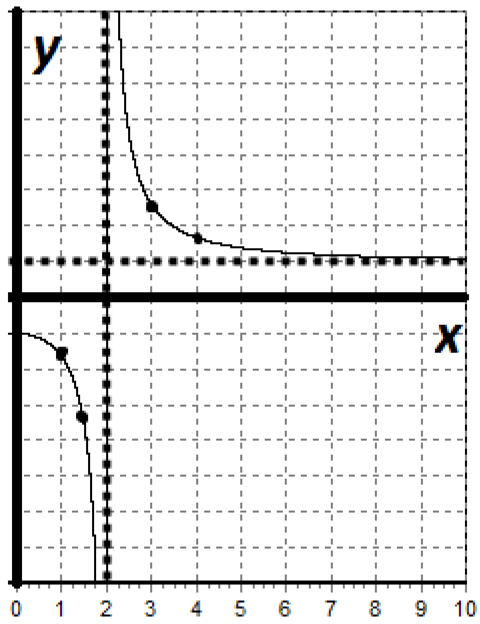
Прямая x=2

Прямая y=1 – горизонтальная асимптота

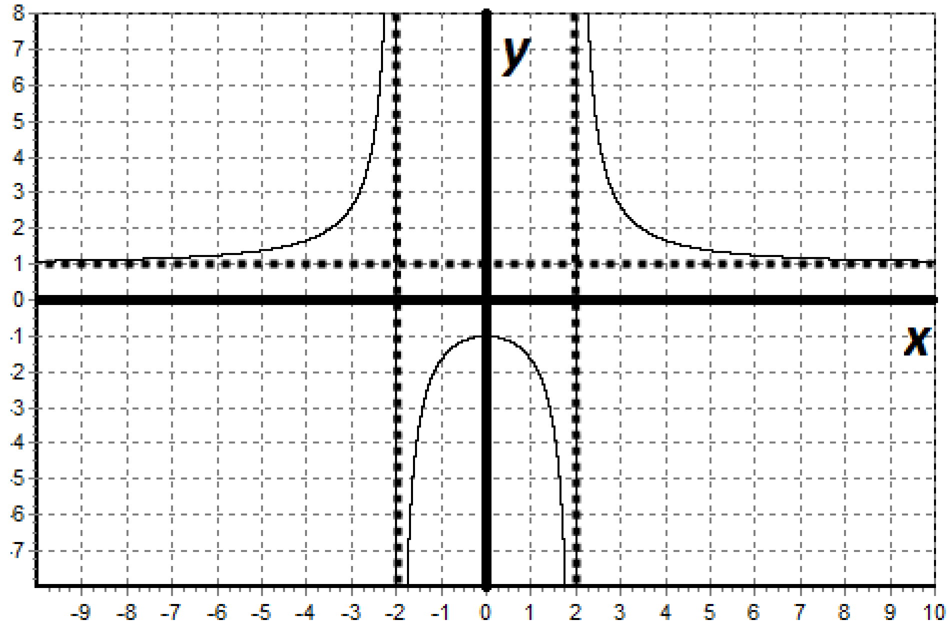
Вычислим значения функции в паре точек:

x	1	3/2	3	4
y	-5/3	-25/7	13/5	5/3

Т.к. функция четная построим сначала график для x≥0.



Используя свойство четных функций, отразим график функции относительно оси ординат.



Задачи для самостоятельного решения:

1) *Построить график функции :*

$$y = -x^2 + 4x - 7$$

2) *Построить график функции:*

$$y = x^3 - 3x + 2$$

3) *Построить график функции:*

$$y = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$$