Урок на тему:

Что такое производная?

Что будем изучать:

Введение в понятие производной.

Чуть-чуть истории.

Определение производной.

Производная на графике функции. Геометрический смысл производной

Алгоритм нахождения производной функции.

Дифференцирование функции.

Примеры.

1) *Введение в понятие производной.*

Существует множество задач совершенно разных по смыслу, но при этом есть математические модели, которые позволяют рассчитывать решения наших задач совершенно одинаковым способом. Например, если рассмотреть такие задачи как:

а) Есть некоторый счет в банке, который постоянно изменяется один раз в несколько дней, сумма постоянно растет, требуется найти с какой скоростью растет счет.

б) Завод выпускает конфеты, есть некоторый постоянный прирост выпуска конфет, найти насколько быстро увеличивается прирост конфет.

в) Скорость движения автомобиля в некоторый момент времени t, если известно положение автомобиля, и он движется по прямой линии.

г) Нам дан график функции и в некоторой точке к нему проведена касательная, требуется найти тангенс угла наклона к касательной.

Формулировка наших задач совершенно разная, и, кажется, что они решаются совершенно разными способами, но математики придумали как можно решить все эти задачи совершенно одинаковым способом. Было введено понятие производной.

2) *Чуть-чуть истории.*

Термин производная ввел великий математик – Ж.Лагранж, перевод на русский язык получается из французского слова derivee, *он же и ввел современные обозначения производной которые мы рассмотрим позже.*

Рассматривали понятие производной в своих работах Лейбниц и Ньютон, применение нашему термину они находили в геометрии и механики соответственно.

Чуть позже мы с вами узнаем, что производная определяется через предел, но существует небольшой парадокс в истории математики. Математики научились считать производную раньше, чем ввели понятие предела и собственно поняли, что же такое производная.

3) *Определение.*

Пусть функция y=f(x) определена на некотором интервале, содержащим внутри себя некоторую точку x0. Приращение аргумента Δx – не выходит из нашего интервала. Найдем приращение Δy и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$*, если существует предел этого отношения при Δx стремящимся к нулю, то указанный предел называют производной функции y=f(x) в точке x0 и обозначают* **f'***(x0).*

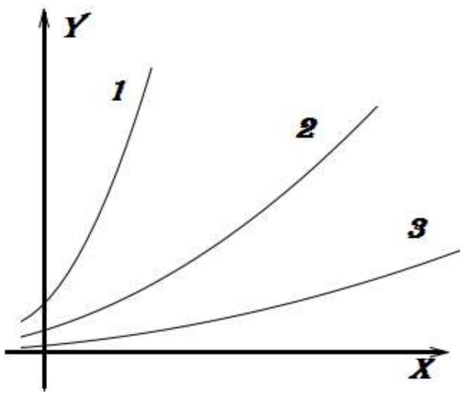
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x0)$$

Попробуем объяснить, что такое производная не математическим языком:

На математическом языке: производная - предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю.

На обычном языке: производная – скорость изменения функции в точке x0.

Давайте посмотрим на графики трех функций:

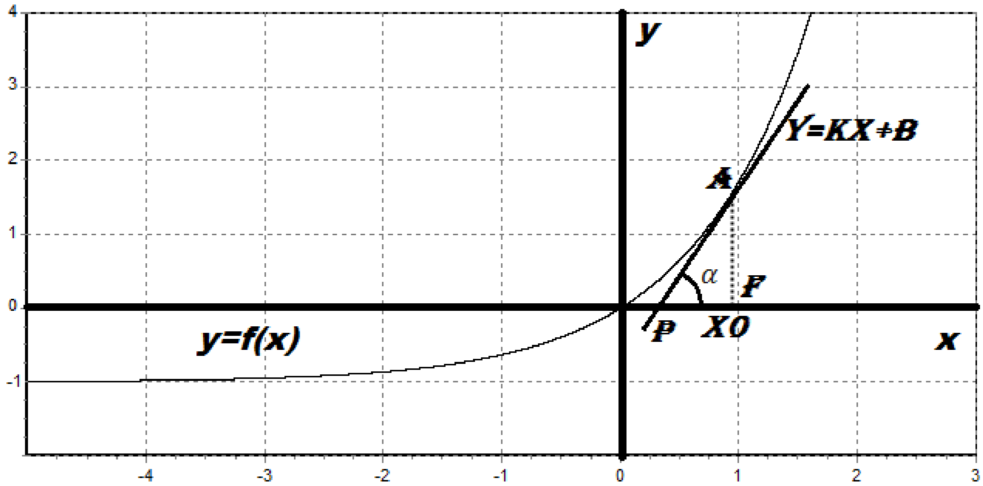


Ребята, как вы думаете, какая из кривых растет быстрее?

Ответ, кажется, очевиден всем 1 кривая растет быстрее остальных. Мы смотрим, насколько круто идет вверх график функции. Другими словами — насколько быстро меняется ордината при изменении x. Одна и та же функция в разных точках может иметь разное значение производной — то есть может меняться быстрее или медленнее.

4) Производная на графике функции. Геометрический смысл производной

Теперь давайте посмотрим, как же найти производную с помощью графиков функции:



Посмотрим на наш график функции: Проведём в точке с абсциссой x0 касательную к графику функции. Касательная и график нашей функции соприкасаются в точке A. Нам надо оценить, насколько круто вверх идет график функции. Удобная величина для этого — тангенс угла наклона касательной.

Определение. Производная функции в точке x0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой к графику функции в этой точке.

$$f'(x0) = tg(\alpha)$$

Угол наклона касательной выбирается как угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс.

И так производная нашей функции равна:

$$f'(x0) = tg(\alpha) = \frac{AF}{PF}$$

И так производная в точке x0 равна тангенсу угла наклона касательной, это геометрический смысл производной.

5) Алгоритм нахождения производной функции.

Алгоритм нахождения производной функции y=f(x).

а) Зафиксировать значение x, найти f(x)

б) Найти приращение аргумента x+ Δx, и значение приращения функции f(x+ Δx).

в) Найти приращение функции Δy= f(x+ Δx)-f(x).

г) Составить соотношение: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

д) Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *- это и есть производная нашей функции.*

6) Дифференцирование функции.

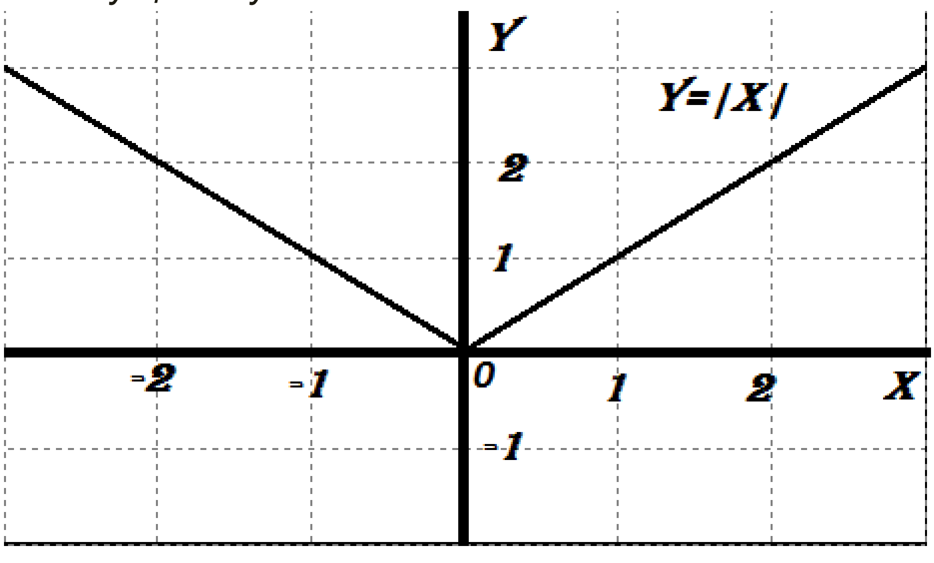
Если функции y=f(x)имеет производную в точке x, то ее называют дифференцируемой в точке x. Процесс нахождения производной называют дифференцированием функции y=f(x).

Вернемся к вопросу непрерывности функции. Если функция дифференцируема в некоторой точке, тогда к графику функции в этой точке можно провести касательную, функция не может иметь разрыв в этой точки, тогда просто напросто нельзя провести касательную.

И так запишем выше сказанное как определение:

Определение. Если функция дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.

Однако, если функция непрерывна в точке, то это не значит, что она дифференцируема в этой точке. Например, функция y=|x| в точке x=0 непрерывна, но касательную провести нельзя, а значит и производной не существует.



7) Примеры.

Найти производную функции: y=3x

Решение:

Будем пользоваться алгоритмом поиска производной.

1) *Для фиксированного значения x, значение функции y=3x*
2) *В точке x+ Δx, y=f(x+ Δx)=3(x+ Δx)=3x+3 Δx*
3) *Найдем приращение функции:*
   Δy= f(x+ Δx)-f(x)= 3x+3 Δx-3x=3Δx
4) *Составим соотношение:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3$$

5)Найдем предел:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 3 = 3$$

Ответ: $f'(x) = 3$

Найти производную функции y=$5x^2$

Решение:

Будем пользоваться алгоритмом поиска производной.

1)Для фиксированного значения x, значение функции y=$5x^2$

2)В точке x+ Δx, y=f(x+ Δx)=5$(x+\ \Delta x)^2 = 5(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)$

3) *Найдем приращение функции:*
   Δy= f(x+ Δx)-f(x)= $5x^2 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 5x^2 = 10x\Delta x + 5\Delta x^2$
4) *Составим соотношение:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10x\Delta x + 5\Delta x^2}{\Delta x} = 10x + 5\Delta x$$

5)Найдем предел:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (10x + 5\Delta x) = 10x$$

Ответ: $f'(x) = 10x$

Найти производную функции y=$2x^2 - x + 1$

Решение:

Будем пользоваться алгоритмом поиска производной.

1)Для фиксированного значения x, значение функции

y=$2x^2 - x + 1$

2)В точке x+ Δx, y=f(x+ Δx)=$2(x+\ \Delta x)^2 - (x+\ \Delta x) + 1 =$

$=2(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - (x+\ \Delta x) + 1$

3) *Найдем приращение функции:*

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) =$

$= 2x^2 + 4x\Delta x + 5\Delta x^2 - (x + \Delta x) + 1 - 2x^2 + x - 1 =$

$= 4x\Delta x + 5\Delta x^2 - \Delta x$

4) *Составим соотношение:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x\Delta x + 5\Delta x^2 - \Delta x}{\Delta x} = 4x + 5\Delta x - 1$$

5)*Найдем предел:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 5\Delta x - 1) = 4x - 1$$

Ответ: $f'(x) = 4x - 1$

Задачи для самостоятельного решения:

Найти производную функции а) y=5 б) y=10x в) y=$2x^2 + x$ *г) y=*$3x^3$