Урок на тему:

Предел функции в точке.

Что будем изучать:

Что такое предел функции в точке.

Определение непрерывной функции.

Обобщение знаний о непрерывных функциях.

Свойства предела.

Примеры.

1) Что такое предел функции в точке?

Ребята, давайте посмотрим на три графика функции, приведенные ниже:

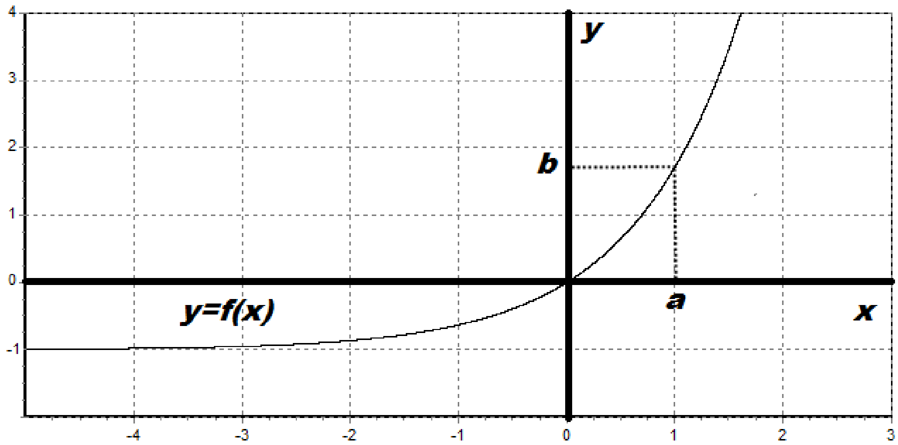


Рис1.

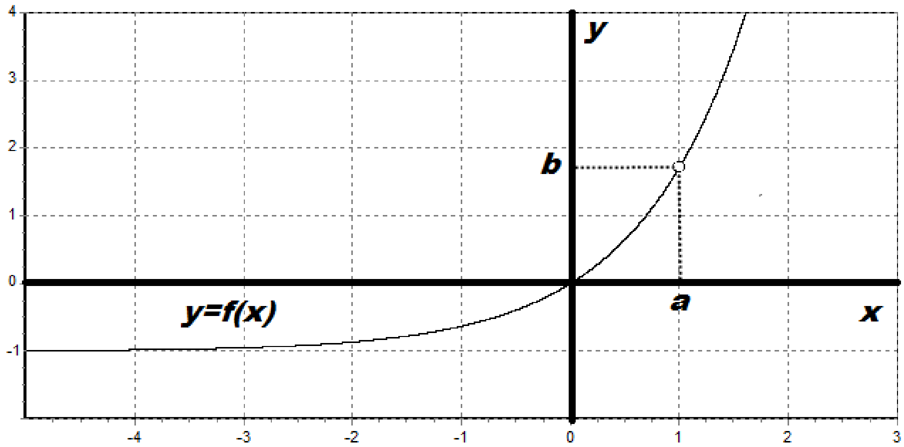


Рис2.

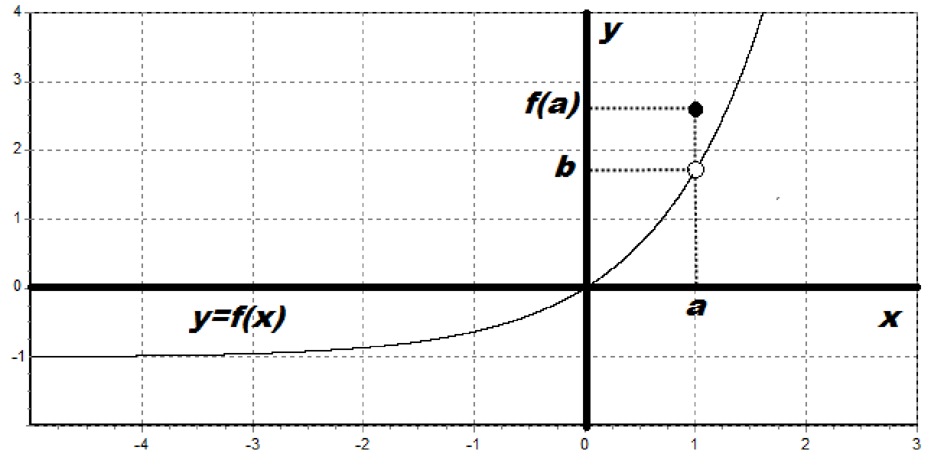


Рис3.

На первый взгляд, графики выглядят совершенно одинаково, но давайте внимательнее посмотрим на наши графики. Посмотрим внимательно на значения функции y=f(x) в точке a.

На Рис1. изображен график непрерывной функции. Значение нашей функции в точке a f(a)=b.

На Рис2. изображен график с так называемой выколотой точкой, значения нашей функции в точке a не существует, посмотрите внимательно на график, наше значение как будто взяли и выкололи.

На Рис3. изображен график значение, которого в точке a существует, но где то отдельно от всего графика, f(a) – расположена выше нашего графика.

На наших рисунках изображены графики трех разных функций. Если мы не будем рассматривать точку a, то графики функций совпадают. При x<a и x>a графики совершенно одинаковые.

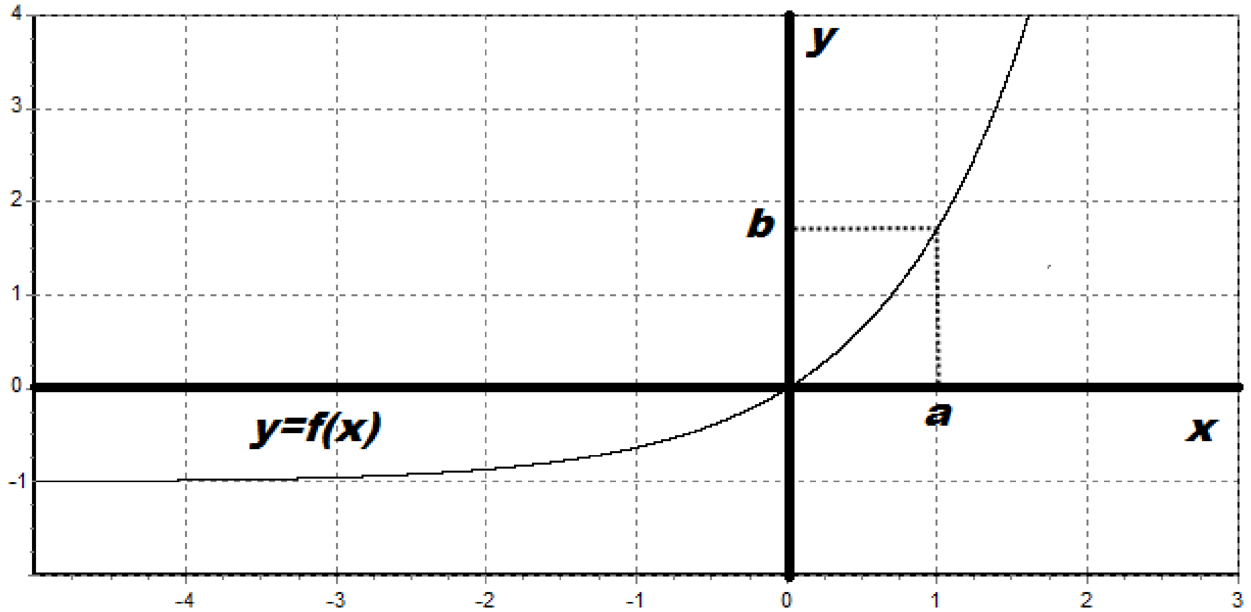
Все случаи описанные для наших рисунков, на математическом языке записывается как:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Читается как: предел функции y=f(x) при x стремящимся к a равен b.

Теперь давайте постараемся понять, что же написано выше. Если значения аргумента функции y=f(x) подбирать все ближе к числу a (если из a вычитать подобранные значения аргумента, то *результатом будет число практически равное нулю), то соответствующие значения функции будут все ближе и ближе к b (если из b вычитать полученные значения функции, то результатом будет число практически равное нулю). При этом стоит заметить, что саму точку a не учитываем.*

Посмотрим опять на первый график:



Можно заметить что:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

График функции на нашем рисунке непрерывен. Тогда, давайте напишем определение непрерывной функции:

2) *Определение непрерывной функции.*

<u>Определение.</u> Функцию y=f(x) называют непрерывной в точке x=a, если выполняется тождество:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Функцию y=f(x) называют непрерывной в точке x=a, если предел функции при x стремящимся к a, равен значению функции в точке x=a.

Функция непрерывна на отрезке [a,b], если она непрерывна в каждой точке нашего отрезка.

3) *Обобщение знаний о непрерывных функциях.*

Полезно: В курсе высшей математики или математическом анализе, существует ряд теорем и утверждений которые доказывают, что все функции, которые мы с вами рассматривали в ранних курсах алгебры являются непрерывными, мы с вами интуитивно и с помощью графиков понимали, что функция непрерывна. Давайте обобщим изученное, важным утверждением:

Если выражение f(x) составлено из рациональных, иррациональных и тригонометрических выражений, то функция y=f(x) непрерывна в любой точке, в которой определенно выражение f(x).

4) Свойства:

Если** $\lim\limits_{x\to a}$ **f(x)=b а** $\lim\limits_{x\to a}$ **g(x)=c то выполняются следующие свойства:

***а)** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=b+c$*

***б)** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)=b\times c$*

***в)** $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{b}{\mathrm{c}}$*

***г)** $\lim\limits_{x\to a}\left(k\times f(x)\right)=kb$*

5) Примеры:

А) Найти предел функции:

$$y=\lim_{x\to 2}(x^4+3x^3+5x^2+5x-2)$$

Решение:

Наша функция непрерывна в точке x=2, тогда воспользуемся определением непрерывности функции в точке, которое говорит что если функция непрерывна в точке, то предел функции в этой точке равен значению функции в этой же точке.

$$y=\lim_{x\to 2}(x^4+3x^3+5x^2+5x-2)=2^4+3\times 2^3+5\times 2^2+5\times 2-2=68$$

Б) Найти предел функции:

$$y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sin(3x)+cos(x)}{-2sin(2x)+3cos(2x)}$$

Решение:

Давайте посмотрим не обращается ли знаменатель нашей функции при $x = \frac{\pi}{2}$ *в нуль:*

$$2sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) + 3cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = 2sin(\pi) + 3cos(\pi) = 3$$

Знаменатель не равен нулю, тогда наша функция непрерывна в точке $\frac{\pi}{2}$ *. Воспользуемся определением непрерывной функции и посчитаем предел нашей функции:*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{sin(3x) + cos(x)}{-2sin(2x) + 3cos(2x)} = \frac{sin\left(3 \times \frac{\pi}{2}\right) + cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-2sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) + 3cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-1}{3}$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$

В) Найти предел функции:

$$y = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Подставим x=2 в знаменатель нашей дроби, получили 0, но на ноль делить нельзя. Давайте внимательно посмотрим на числитель нашей дроби.

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Сократим нашу дробь

$$\frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$$

Тогда получаем:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x + 2)$$

y= x+2 непрерывна точке x=2, тогда воспользуемся определением непрерывности

$$\lim_{x \to 2}(x + 2) = 2 + 2 = 4$$

Ответ: 4

Г)Найти предел функции:

$$y = \lim_{x \to 2} \sqrt{1 - x}$$

Решение:

Область определения функции y=$\sqrt{1-x}$ *D(y)=(- ∞;1). Наша точка x=2 не попадает в область определения, тогда предел функции не существует.*

Ответ: Не существует.

Д) Найти предел функции:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

Решение:

Подставим x=1 в знаменатель нашей дроби, получили 0, но на ноль делить нельзя.

Давайте найдем корни квадратного уравнения в числители и воспользуемся теоремой Виета.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 => x1 = 2 \text{ и } x2 = 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - x1)(x - x2) = (x - 2)(x - 1)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-2)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x - 2) = 1 - 2 = -1$$

Ответ: -1

Е) Построить график функции y=f(x), которая обладает следующими свойствами:

1)Область определения – множество действительных чисел.

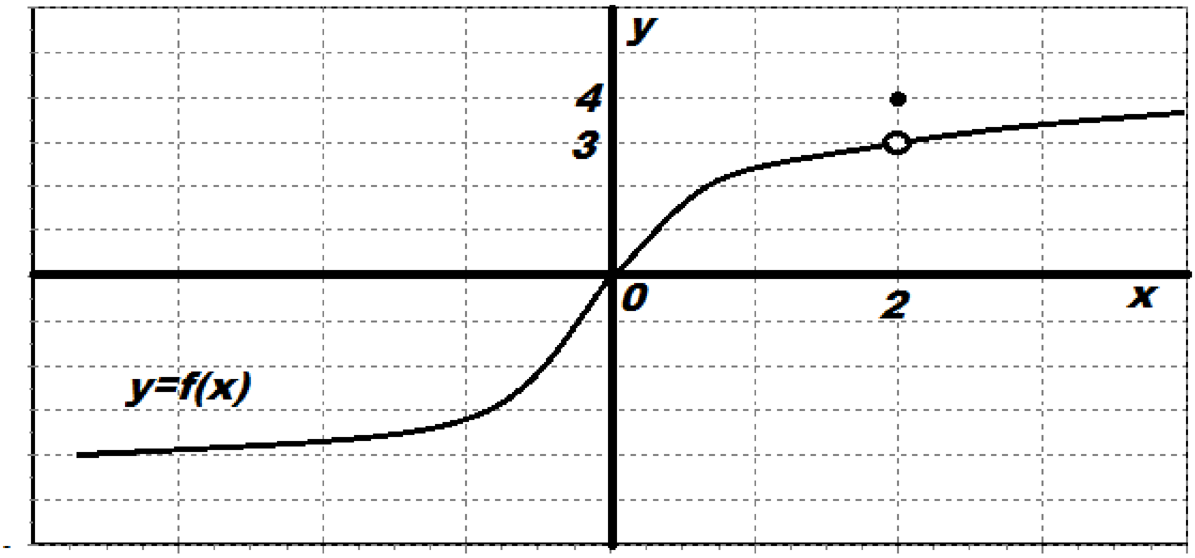
2) $\lim\limits_{x \to 2}$*f(x)=3*

3) f(2)=4

4) f(x)<0 при x<0

Решение:

Покажем один из возможных графиков.



Примеры для самостоятельного решения:

1) *Найти предел функции:*

$$y = \lim_{x \to -1} (x^5 + 6x^4 - 15x^2 + 5x - 7)$$

2) *Найти предел функции:*

$$y = \lim_{x \to \pi} \frac{sin(-2x) + cos(5x)}{7sin(5x) - 2cos(x)}$$

3) *Найти предел функции:*

$$y = \lim_{x \to 8} \frac{x - 8}{x^2 - 64}$$

4) *Найти предел функции:*

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

5)Построить график функции y=f(x), которая обладает следующими свойствами:

а)Область определения – множество действительных чисел.

б) $\lim_{x \to -2} f(x) = -4$

в) f(-2)=3

г) $f(x)<0$ при $x<-1$

д) $f(x)>0$ при $x>-1$