

## Урок на тему:

### Приращение аргумента, приращение функции.

#### Что будем изучать:

Определение приращения аргумента, приращения функции.

Непрерывная функция и приращение.

Примеры.

#### 1) Определение.

Ребята, мы с вами научились находить пределы функции в точке, но так же важным остается вопрос, как изменяется значение функции при изменении значения аргумента около этой точки.

Математики ввели такое понятие как – приращение аргумента и функции. Давайте запишем определение:

Определение. Пусть функция  $y=f(x)$  определена в точках  $x_0$  и  $x_1$ . Разность  $x_1-x_0$  называют приращением аргумента, а разность  $f(x_1)-f(x_0)$  - приращением функции.

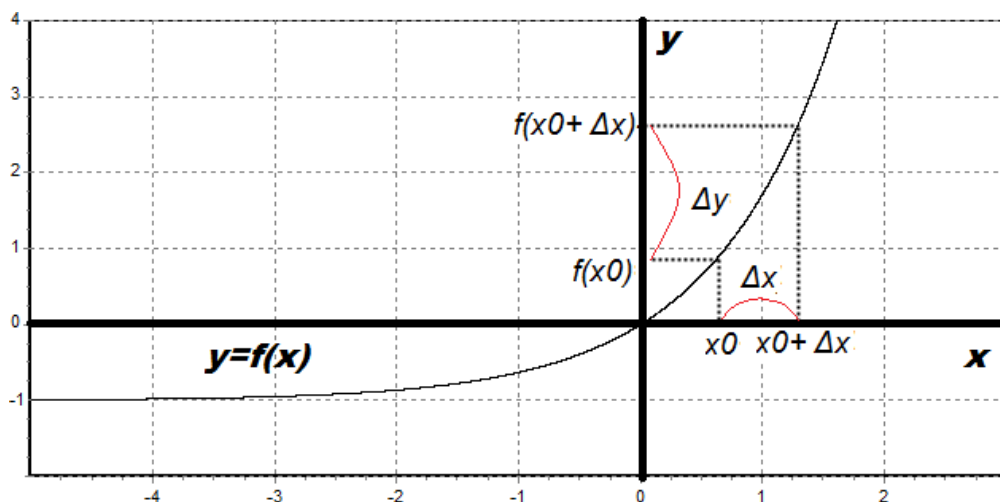
Иначе говоря, узнаем прирост точки  $x_0$  в точке  $x_1$ . Приращение аргумента обозначают как  $\Delta x$ , читается как дельта x.

Приращение функции обозначают как  $\Delta y$  или  $\Delta f(x)$ .

Из нашего определения следует:  $x_1-x_0= \Delta x \Rightarrow x_1= \Delta x+x_0$  и

$f(x_1)-f(x_0)= \Delta y$  тогда получаем важное равенство:

$$\Delta y=f(x_0+ \Delta x)-f(x_0)$$



Приращение функции может быть как положительным, так и отрицательным. Давайте рассмотрим пример:

Найти приращение функции  $y=x^3$  при переходе от  $x_0=2$  к точке:

а)  $x=2,1$  б)  $x=1,9$

Решение: Обозначим  $f(x)=x^3$

Имеем:  $f(2)=2^3=8$

а) Воспользуемся формулой  $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ , тогда нам надо найти значение  $f(2,1)$

$$f(2,1)=2,1^3=9,261$$

$$\Delta y=f(2,1)-f(2)=9,261-8=1,261$$

б)  $f(2)=8$

$$f(1,9)=1,9^3=6,859$$

$$\Delta y=f(1,9)-f(2)=6,859-8=-1,141$$

Ответ: а) 1,261 б) -1,141

## 2) Непрерывная функция и приращение.

Ребята, давайте вернемся к определению непрерывной функции, и посмотрим на него с помощью приращений.

Вспомним определение непрерывной функции:

Определение. Функцию  $y=f(x)$  называют непрерывной в точке  $x=a$ , если выполняется тождество:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Обратим внимание:  $x \rightarrow a$  тогда  $(x - a) \rightarrow 0$ , т.е.  $\Delta x \rightarrow 0$

Так же заметим:  $f(x) \rightarrow f(a)$ , значит  $f(x) - f(a) \rightarrow 0$ , т.е.  $\Delta y \rightarrow 0$

Тогда определение непрерывности функции в точке можно записать так:

Функция  $y=f(x)$  непрерывна в точке  $x=a$ , если в этой точке выполняется следующее условие:

если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $\Delta y \rightarrow 0$

### 3) Примеры.

Для функции  $y=kx+b$  найти:

а) Найти приращение функции при переходе от фиксированной точки  $x$  к  $x + \Delta x$

б) Предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Решение:

а)  $f(x) = kx + b$

$$f(x + \Delta x) = k(x + \Delta x) + b;$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = k(x + \Delta x) + b - (kx + b) = kx + k\Delta x + b - kx - b = k\Delta x$$

б) Найдем требуемый предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k = k$$

Для функции  $y=x^3$  найти:

а) Найти приращение функции при переходе от фиксированной точки  $x$  к  $x + \Delta x$

б) Предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Решение:

а)  $f(x) = x^3$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3;$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

б) Найдем требуемый предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2$$

### 4) Задачи для самостоятельного решения:

а) Найти приращение функции  $y=x^4$  при переходе от  $x_0=3$  к точке:

а)  $x=3,2$  б)  $x=2,8$

- б) Для функции  $y=3x+5$  найти приращение функции при переходе от фиксированной точки  $x$  к  $x+\Delta x$
- в) Для функции  $y=x^2$  найти приращение функции при переходе от фиксированной точки  $x$  к  $x+\Delta x$
- г) Для функции  $y=2x^3 + 1$  найти приращение функции при переходе от фиксированной точки  $x$  к  $x+\Delta x$