Урок на тему:

Вычисление производных.

Что будем проходить:

Формулы дифференцирования.

Правила дифференцирования.

Дифференцирование функции вида y=f(kx+m).

Примеры.

1) *Формулы дифференцирования.*

Построим таблицу для нахождения производных и постараемся запомнить ее:

$C' = 0$	$(x^2)' = 2x$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$x' = 1$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(kx + m)' = k$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\sin x)' = \cos x$	

Ребята постарайтесь запомнить нашу таблицу, она может помочь вам при решении разных заданий.

Давайте выведем какую-нибудь формулу из таблицы:

Найдем производную $\frac{1}{x}$

Будем пользоваться алгоритмом поиска производной.

1)Для фиксированного значения x, значение функции y=$\frac{1}{x}$

2)В точке x+ Δx, y=f(x+ Δx)= $\frac{1}{x+\Delta x}$

3) Найдем приращение функции:

Δy= f(x+ Δx)-f(x)= $\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

4) Составим соотношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}$$

5)Найдем предел:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{1}{x(x+\Delta x)} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

А теперь посмотрим пару примеров нахождения производной.
Найти производную функций и вычислить ее значения:
а) у= 5х-7, при х=2
б) у= x^4, при х=5
в) у=sin(x), при х=0
Решение:
а) у'=5 в каждой точке, тогда у'(2)=2
б) у'=4x^3, тогда у'(5)=4×5^3=500
в) у'=cos(x), у'(0)=cos(0)=1

2) Правила дифференцирования.

Запишем основные свойства дифференцирования, правила которыми мы будем пользоваться при нахождении производных.

а) Если функции у=f(x) и у=g(x) имеют производную в точке х, то их сумма имеет производную в точке х, производная суммы равна сумме производных.

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

b) Если функции у=f(x) имеет производную в точке х, то и функция у=f(k×x), имеет производную.

$$f'(kx) = kf'(x)$$

c) Если функции у=f(x) и у=g(x) имеют производную в точке х, то их произведение имеет производную в точке х.

$$(f(x)\times g(x))' = f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

d) Если функции у=f(x) и у=g(x) имеют производную в точке х, то их частное имеет производную в точке х.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'^{(x)}g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

Пример 1:
Найти производную функции у=$x^4 + 3x^2 + \sin(x)$

Решение:

Воспользуемся первым свойством - производная суммы равна сумме производных, так же воспользуемся и вторым свойством:

$y' = (x^4 + 3x^2 + \sin(x))' = (x^4)' + (3x^2)' + (\sin(x))' = 4x^3 + 6x + \cos(x)$

Ответ: $y' = 4x^3 + 6x + \cos(x)$

Пример 2:

Найти производную функции $y = co\,s(x)\,(x^5 + 1)$

Решение:

Воспользуемся третьим свойством:

$$y' = \left(co\,s(x)\,(x^5 + 1)\right)' = cos'(x)(x^5 + 1) + \cos(x)\,(x^5 + 1)' =$$
$$= -\sin(x)\,(x^5 + 1) + \cos(x)\,(5x^4) =$$
$$= -x^5 \sin(x) - \sin(x) + 5x^4\cos(x)$$

Ответ: $y' = -x^5 \sin(x) - \sin(x) + 5x^4\cos(x)$

Пример 3:

Найти производную функции $y = \frac{x^3+x-1}{x^2-2x}$

Решение:

Воспользуемся четвертым свойством:

$$y' = \left(\frac{x^3 + x - 1}{x^2 - 2x}\right)' = \frac{(x^3 + x - 1)'(x^2 - 2x) - (x^2 - 2x)'(x^3 + x - 1)}{(x^2 - 2x)^2}$$
$$= \frac{(3x^2 + 1)(x^2 - 2x) - (2x - 2)(x^3 + x - 1)}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2)}$$
$$= \frac{3x^4 - 6x^3 + x^2 - 2x - 2x^4 - 2x^2 + 2x + 2x^3 + 2x - 2}{x^4 - 4x^3 + 4x^2}$$
$$= \frac{x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^4 - 4x^3 + 4x^2}$$

Ответ: $y' = \frac{x^4-4x^3-x^2+2x-2}{x^4-4x^3+4x^2}$

3) Дифференцирование функции вида y=f(kx+m).

Производная функция y=f(kx+m) вычисляется по формуле:

$$y' = kf'(kx + m)$$

Пример 1:

Найти производную функции $y = \sin(5x)$, $y = -cos(10x)$

Решение:

Воспользуемся нашим свойством:

$$y' = 5\sin(5x)$$
$$y' = -10(-\sin(10x)) = 10\sin(10x)$$

Пример 2:
Найти производную функции $y = \sqrt{5x - 10}$

Решение:

Производная $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, *вместо x запишем 5x-10 и не забудем учесть свойство в нашем пункте.*

$$y' = 5\frac{1}{2\sqrt{5x - 10}}$$

Пример 3:
Найти производную функции $y = \cos(3x - 4)$

Решение:

$$y' = -3\sin(3x - 4)$$

Пример 4:
Найти значение производной функции $y = (5x - 4)^6$ *в точке x=1*

Решение:

$$y' = 5 \times 6(5x - 4)^5 = 30(5x - 4)^5$$

$$y'(2) = 30(5 \times 1 - 4)^5 = 30(1)^5 = 30$$

Ответ: $y'(2) = 30$
Пример 5:
Вычислить скорость изменения функции $y = (3x - 2)^7$ *в точке x=2*

Решение:

Вспомним, что скорость изменения функции это другое название производной:

$$y' = 7(3x - 2)^6$$
$$y'(2) = 7(3 \times 2 - 2)^6 = 7 \times 4^6 = 7 \times 4096 = 28672$$

Ответ: скорость изменения функции в точке x=2 равна 28672

Задачи для самостоятельного решения:

1)*Найти производную функций и вычислить ее значения:*

а) у= 3х+8, при х=5

б) у= $2x^6$*, при х=2*

в) у=3cos(x), при х=π/2

2) Найти производную функции у=$x^5 + 4x^4 + x^3 + 7x + \mathrm{tg}(x)$

3) Найти производную функции $y = c\mathrm{tg}(\mathrm{x})(x^4 + 3x + 5)$

4) Найти производную функции $y = \frac{x^2+7x-8}{x^3-5x^2}$

5) Найти производную функции $y = \sqrt{15 - 2x}$

6) Найти производную функции $y = \mathrm{tg}(8x - 5)$

7) Вычислить скорость изменения функции $y = (-6x - 3)^5$ *в точке х=-1*